



DISEÑO ANALÍTICO DE LOS MECANISMOS PLANOS DE LEVAS DE MAGNITUD MÍNIMA¹

BORIS F. VORONIN², SALVADOR GUTIÉRREZ ALCALÁ³

²Universidad de Guadalajara

Departamento de Ingeniería Mecánica Eléctrica, CUCEI

Blvd. Marcelino García Barragan 1421, esq. Calzada Olímpica, Guadalajara, Jalisco, México, C.P. 44430

³Universidad Panamericana

Departamento de Ingeniería Mecatrónica

Guadalajara, Jalisco, México

(Recibido 15 de diciembre de 2009, para publicación 10 de marzo de 2010)

Resumen – Uno de las etapas más importantes del cálculo de mecanismos planos de levas es la definición del radio del círculo primario de la leva. En el artículo se propone un nuevo método analítico de su cálculo que se basa en la interpretación gráfica de la determinación del centro de la rotación de la leva que permite diseñar un mecanismo con parámetros óptimos de magnitud mínima. El método es simple en la aplicación, no exige el uso de los procedimientos complicados de las matemáticas. En la primera parte del artículo se exponen las bases teóricas usadas para el método del desarrollo, mientras que en la segunda se muestran su desarrollo y uso para el cálculo del radio del círculo primario de la leva. El método es elaborado para el cálculo de los mecanismos de levas con seguidor del movimiento lineal alternativo de cuña, de rodillo, de zapata curva y de cara plana. El método es destinado para el uso por los profesores que imparten clases de Teoría de los Mecanismos y las Máquinas, por los ingenieros diseñadores de los sistemas mecánicos, también por los ingenieros que elaboran SOFTWARE.

Palabras clave – Teoría de Mecanismos, mecanismos de levas, círculo primario de la leva.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de mecanismos de levas consta de dos partes principales: la determinación de la magnitud del radio del círculo primario y la construcción de su perfil en correspondencia con la ley de movimiento. El presente artículo está dedicado a la solución del primer problema ya que con ésta se obtiene el mecanismo con las propiedades óptimas de tamaño mínimo. Para ilustrar el potencial del enfoque propuesto se realiza el análisis de mecanismos con un seguidor de movimiento lineal alternativo de cuña, de rodillo, de zapata curva y de cara plana.

Para los mecanismos de seguidor de cuña, de rodillo y de zapata curva el limitante es el ángulo de presión. El método gráfico presentado en algunos libros de texto [8,9] se basa en la dependencia matemática que relaciona el ángulo de presión α con el desplazamiento s y la velocidad v del seguidor [3,5,7,8,9]. Su expresión analítica es:

$$\tan \alpha = \frac{s' - e}{s + \sqrt{r_0^2 - e^2}}, \quad (1)$$

en donde e es la excentricidad; s' es el análogo de velocidad de la punta del seguidor y r_0 es el radio del círculo primario de la leva.

¹ El tema presentado en el artículo fue discutido en “The 9th International Scientific Conference devoted to the 45th anniversary of Siberian State Aerospace University named after academician M.F.Reshetnev”. Krasnoyarsk, Rusia (2005) y en el XIII Congreso Internacional de la SOMIM. Durango, México (2007)

Según este método, en el sistema de coordenadas ss' , en que el eje s coincide con la línea de desplazamiento de la punta del seguidor, a escala μ_L se construye el diagrama adicional $s' = s'(s)$. Si el mecanismo es de cierre geométrico del par cinemático superior, a las partes positiva y negativa de éste, correspondientes a la fase de subida y a la de retorno de la leva, se trazan líneas tangentes de modo que formen con el eje s un ángulo igual al de presión admisible α_{adm} . Con esta construcción en la intersección de las tangentes se define el centro de rotación de la leva y, por consiguiente, el radio del círculo primario de la leva de magnitud mínima r_{min} . Este método brinda una exactitud de entre el 3 y el 5 por ciento, que es suficiente para la mayor parte de problemas de ingeniería mecánica.

El método analítico presentado en varios libros de texto [8,9], que simplificando el diagrama adicional toma puntos extremos de éste como puntos de toque de la tangente, no es correcto y puede conducir a grandes errores.

En el libro [5] se recomienda utilizar el programa DYNACAM, o algún otro programa similar, como MatLab, TKSolver, o Mathcad para “encontrar un arreglo adecuado” mediante el cálculo de numerosas variantes. Realizar este proceso es bastante complicado ya que la elección de una sola variante sobre numerosas otras es un proceso muy difícil y laborioso. Un método semejante se propone en [3].

En [7] se muestra una propuesta de estudiar los valores extremos del ángulo de presión α . Para realizar esto se recomienda utilizar la derivada de (1) con respecto al ángulo de giro de la leva φ e igualarla a cero. Con esto se encuentran los valores extremos de s' y se encuentran los valores de φ que proporcionan el ángulo de presión máximo y mínimo. No obstante esta recomendación no está desarrollada ya que según el autor “es un proceso matemático tedioso”. Por esta razón se recomienda usar un nomograma para los estudios de α que limite las posibilidades presentadas por los medios modernos del cálculo y diseño.

En otros libros, así como en [1,4,6], no se toca la solución de este problema.

Para los mecanismos de seguidor de cara plana el ángulo de presión no depende de la posición de la leva. Si la cara es perpendicular a la trayectoria de desplazamiento del seguidor, éste siempre será igual a cero. Para este tipo de mecanismos, la condición más importante es la convexidad del perfil de la leva, lo que se expresa en la fórmula de J.L. Herónimus [2]:

$$r + s + s'' > 0 \quad (2)$$

en donde s'' es el análogo de aceleración del seguidor.

La representación gráfica de este método es la siguiente: en el sistema de coordenadas ss'' se construye el diagrama adicional $s'' = s''(s)$ y a su parte negativa se traza una tangente que forma un ángulo 45° con el eje s . En la intersección de la tangente con el eje s se encuentra el centro de rotación de la leva cuyo círculo primario tendrá el radio mínimo.

Para este tipo de mecanismos es posible emplear los puntos del diagrama adicional con valores de aceleración máximos como los de tangencia porque el error será mínimo en comparación con el primer caso.

Para unificar los cálculos, a continuación se presentan métodos analíticos para ambos casos en los que se define el radio mínimo del círculo primario de la leva.

2. PRINCIPIOS DE LA DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE ROTACIÓN DE LA LEVA

2.1. Mecanismos de seguidor de cuña, de rodillo y de zapata curva

Para estos tipos de mecanismos, como fundamento, se toma la interpretación gráfica antes descrita. Por eso, para definir el centro de rotación de la leva se necesitan determinar dos líneas tangentes al diagrama adicional, representarlas en forma analítica y encontrar el punto de su intersección.

Para una mejor comprensión del método se toma el mecanismo con cierre de fuerza del par cinemático superior con excentricidad e diferente de cero. Para estos mecanismos, la leva es el eslabón impulsor solamente en la fase de subida, en la fase de retorno el eslabón impulsor es el seguidor, por eso el ángulo

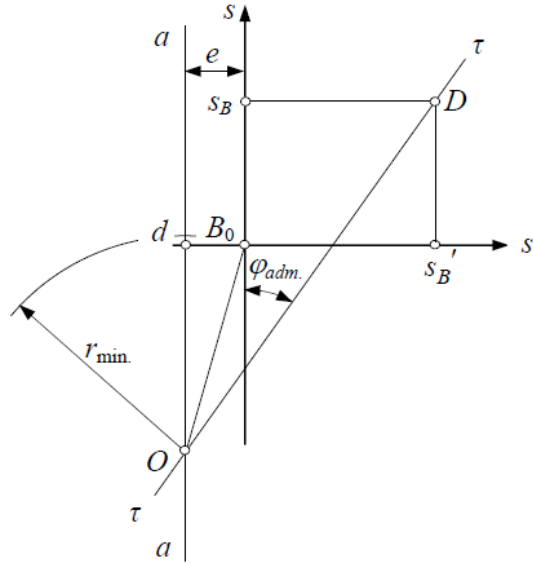


Fig. 1. Diagrama que ilustra la determinación del centro de rotación de la leva para una sola posición del mecanismo.

de presión es limitado solamente para dicha fase. Debido a esto, para los mecanismos citados, es suficiente construir el diagrama adicional $s' = s'(s)$ solamente para la fase de subida.

En la Fig. 1 se muestra el sistema de coordenadas ss' construido de modo que su inicio se ubique en el punto B_0 y el eje s coincida con la trayectoria de la punta del seguidor. En éste se construye el diagrama adicional para una sola posición del mecanismo lo que se reduce a un solo punto D con los coordenadas:

$s_B = \frac{H_B}{\mu_L}$, en donde H_B es el desplazamiento del punto B del seguidor y μ_L es la escala en que se

representa el diagrama, y $s'_B = \frac{v_B}{\omega}$, es el análogo de velocidad del mismo punto en donde v_B es la velocidad de éste en la posición elegida y ω es la velocidad angular de la leva.

Al trazar una línea a través del punto D , la línea $\tau - \tau$ que forma un ángulo $\alpha_{adm.}$ con el eje s , en la intersección de ésta con la recta $a - a$ trazada a distancia e desde el eje s , se encuentra el centro de rotación de la leva O . La circunferencia trazada a partir de este punto a través del inicio del sistema de coordenadas B_0 será la del círculo primario con el radio de magnitud mínima $r_{min.}$. Utilizando la Fig. 1 se tiene:

$$r_{min.} = \sqrt{(Od)^2 + e^2} . \tag{3}$$

Dado que $Od = \frac{s' - e}{\tan \alpha_{adm.}} - s$, en donde $s = s(\varphi)$ y su derivada es $s' = [ds/d\varphi]_{\varphi=\varphi_i}$, resulta:

$$r_{min.} = \sqrt{\left(\frac{s' - e}{\tan \alpha_{adm.}} - s\right)^2 + e^2} . \tag{4}$$

Ya que la posición del mecanismo fue elegida arbitrariamente entonces el diagrama puede tener puntos en que el ángulo de presión α tiene mayor magnitud de la que sería admisible. Para que la condición $\alpha \leq \alpha_{adm.}$ sea justa para todas las posiciones del mecanismo la recta $\tau - \tau$ debe ser tangente al diagrama adicional formado por el conjunto infinito de los puntos D y la magnitud de $r_{min.}$ debe ser máxima.

En Cálculo se sabe que una función de una variable tendrá un valor extremo (mínimo o máximo) en el punto en que la derivada con respecto a la variable es igual a cero. Para el presente caso dicha condición se obtiene mediante la igualación a cero de la derivada de la ecuación (4), es decir:

$$r'(\varphi) = 0. \quad (5)$$

Desarrollando la expresión (5) se tiene:

$$r' = (s'' - s' \tan \alpha_{adm.}) \times \left[(s' - s \tan \alpha_{adm.} - e)^2 + e^2 \tan^2 \alpha_{adm.} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Analizando la ecuación (6) se llega a una conclusión, que la (5) se cumplirá en dos casos:

a) cuando el primer coeficiente $(s'' - s' \tan \alpha_{adm.})$ sea igual a cero y el segundo

$$\left[(s' - s \tan \alpha_{adm.} - e)^2 + e^2 \tan^2 \alpha_{adm.} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ esté determinado;}$$

b) cuando el primer coeficiente $(s'' - s' \tan \alpha_{adm.})$ esté determinado y el segundo

$$\left[(s' - s \tan \alpha_{adm.} - e)^2 + e^2 \tan^2 \alpha_{adm.} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ tienda al infinito.}$$

El segundo caso se cumple solamente con $\alpha_{adm.} = 90^\circ$ lo que sucede para mecanismos de leva fuera de límites reales. Por lo tanto, resulta válido solamente el primer caso, mismo que es más conveniente representar de la siguiente forma:

$$s'' = s' \tan \alpha_{adm.}. \quad (7)$$

Para mostrar su aplicación, considere el ejemplo de un mecanismo de leva plano con cierre mediante la fuerza del par cinemático superior. En este caso es suficiente construir el diagrama adicional solamente para la fase de subida y determinar el centro de rotación de la leva considerando solamente dicha fase. Para los cálculos se tiene: el ángulo de la fase de subida en magnitud $\beta = 130^\circ$, la carrera del seguidor igual a $H = 0.04$ m, la excentricidad se elige como $e = 0$, el ángulo de presión admisible igual a $\alpha_{adm.} = 30^\circ$ y la función de desplazamiento para esta fase se considera representada en la siguiente forma:

$$s = \frac{H}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi\varphi}{\beta} \right). \quad (8)$$

Entonces su primera derivada con respecto a la variable φ resulta ser:

$$s' = \frac{\pi H}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi\varphi}{\beta}. \quad (9)$$

y la segunda:

$$s'' = \frac{\pi^2 H}{2\beta^2} \cos \frac{\pi\varphi}{\beta}. \quad (10)$$

Al sustituir las ecuaciones (9) y (10), en (7), simplificando y despejando, se obtiene la formula para la obtención del valor del ángulo de giro de la leva φ^* cuando la $\tau - \tau$ es tangente al diagrama adicional:

Tabla 1. Valores para la construcción del diagrama adicional.

φ , grad.	$k = \frac{\varphi}{\beta}$	s , mm	s' , mm/rad
0	0.000	0.00	0.00
10	0.077	0.58	6.63
20	0.154	2.29	12.87
30	0.231	5.03	18.36
40	0.308	8.64	22.79
50	0.385	12.91	25.89
60	0.462	17.59	27.49
70	0.538	22.41	27.49
80	0.615	27.09	25.89
90	0.692	31.36	22.79
100	0.769	34.97	18.36
110	0.846	37.71	12.87
120	0.923	39.42	6.63

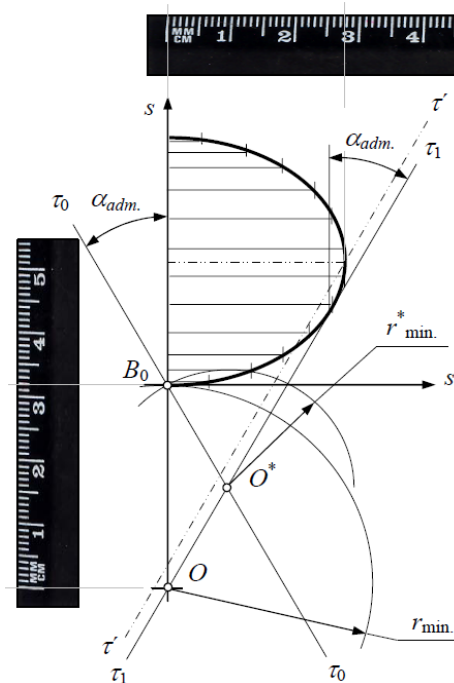


Fig. 2. Prueba gráfica de validez del método analítico para el mecanismo de de rodillo de seguidor alternativo.

$$\varphi^* = \frac{\beta}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\beta \tan \alpha_{adm.}} \quad (11)$$

Ahora, sustituyendo los coeficientes en la ecuación (11) por sus valores numéricos se obtiene: $\varphi^* = 48.65^\circ$. Haciendo lo mismo en las ecuaciones (8) y (9) y sustituyendo en (4) los términos y coeficientes por sus valores, se obtiene: $r_{min.} = 0.03197 \text{ m}$ o $r_{min.} = 31.97 \text{ mm}$.

Para comprobar la validez del enfoque analítico descrito se usa, como ilustración más evidente, el método gráfico. Para esto se usan mismos valores.

En la Tabla 1 se muestran los resultados de cálculo de las ecuaciones (8) y (9) necesarios para la construcción del diagrama adicional, y en la Fig. 2 el diagrama construido en el sistema de coordenadas ss' a escala $\mu_L = 0.001 \text{ m/mm}$ acompañado con las reglas.

Ya que $e = 0$ entonces, el centro de rotación de la leva debe ser ubicado en el eje s . Al trazar la línea $\tau_1 - \tau_1$ tangente al diagrama adicional a un ángulo $\alpha_{adm.} = 30^\circ$ con respecto al eje s , en el cruce de éstas se encuentra el punto O que se considera el centro de rotación de la leva. Trazando a partir de este punto una circunferencia a través del inicio del sistema de coordenadas B_0 y midiendo su radio se obtiene que $r_{min} \approx 32.0 \text{ mm}$.

La comparación de los resultados obtenidos muestra plena coincidencia del cálculo analítico con la construcción gráfica.

Ahora usando la misma figura se puede añadir lo siguiente. Si uno de los más importantes requisitos de este proceso es la obtención del mecanismo de tamaño mínimo entonces el centro de rotación de la leva se ubicará en la intersección de la tangente $\tau_1 - \tau_1$ con la recta $\tau_0 - \tau_0$ que se traza a través del inicio del sistema de coordenadas ss' al mismo ángulo $\alpha_{adm.}$. En este caso el radio mínimo r_{min}^* será igual al segmento OB_0 . Al usar la Fig. 2, se concluye que $r_{min}^* = \frac{OB_0}{2 \cos \alpha_{adm.}}$.

En los cálculos anteriores hay que tener en cuenta los errores posibles de fabricación. Por ello, es importante para asegurarse que la condición $\alpha \leq \alpha_{adm.}$ sea cumplida en todas las posiciones del mecanismo, donde el radio r del círculo primario se debe considerar un poco mayor que r_{min} . En la mayoría de los casos es suficiente considerar $r = (1.03 - 1.05)r_{min}$.

Además de este análisis, usando la Fig. 2, se puede apreciar la exactitud del método analítico presentado en [8, 9] que, para el cálculo, recomienda considerar los puntos extremos del diagrama adicional como los de tangencia. Al trazar la línea $\tau' - \tau'$ a través del punto extremo del diagrama adicional con s' máxima y medir las magnitudes de r_{min} , se llega a una conclusión que, para el mecanismo presentado con $e = 0$ el error sería de 12.6%, mientras que para el mecanismo de dimensiones mínimas de 11.65, lo que es considerablemente mayor que el error del método gráfico y, por consiguiente, no es aceptable.

Para la determinación del punto de intersección de las rectas y , como consecuencia, del centro del círculo primario, resulta más conveniente usar la forma paramétrica. Ésta consiste en lo siguiente. Al definir las coordenadas del punto de tangencia de la línea $\tau - \tau$ al diagrama adicional, por ejemplo del punto D mostrado en la Fig. 3 con las coordenadas s y s' , también teniendo en cuenta que el segmento BD es igual al análogo de velocidad s'_B , la ecuación de la tangente $\tau - \tau$ se representará en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= s' + t \operatorname{sen} \alpha_{adm.} \\ y &= s + t \operatorname{cos} \alpha_{adm.} \end{aligned} \quad (12)$$

en donde t es el parámetro de la tangente $\tau - \tau$.

Si uno de los requisitos es que el centro de rotación de la leva se ubique en la recta $a - a$ trazada a una distancia e y respecto a la trayectoria del movimiento de la punta del seguidor, entonces su ecuación se representará como:

$$\begin{aligned} x_a &= e \\ y_a &= t_a \end{aligned} \quad (13)$$

en donde t_a es el parámetro de la recta $a - a$. Así pues, el punto de intersección de éstas va a ser determinado mediante la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} x_a &= x \\ y_a &= y \end{aligned} \quad (14)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (14) y después de algunas simplificaciones resulta: $Od = t_a = -\left(\frac{s' - e}{\tan \alpha_{adm.}} - s\right)$. En la Fig. 3 se ve que el radio mínimo del círculo primario es igual al segmento OB_0 , por eso se tiene:

$$r_{\min.} = OB_0 = \sqrt{t_a^2 + e^2} = \sqrt{\left(\frac{s' - e}{\tan \alpha_{adm.}} - s\right)^2 + e^2}. \quad (15)$$

Hay que notar, que la formula (15) completamente coincide con la (4), pero es obtenida de distinta manera.

Si es necesario diseñar un mecanismo con dimensiones mínimas, se encuentra el punto de intersección de la tangente $\tau - \tau$ con la recta $\tau_0 - \tau_0$, que se traza a través del punto B_0 al mismo ángulo $\alpha_{adm.}$. La ecuación de la recta $\tau_0 - \tau_0$ se representará como:

$$\begin{aligned} x_0 &= -t_0 \operatorname{sen} \alpha_{adm.} \\ y_0 &= t_0 \operatorname{cos} \alpha_{adm.} \end{aligned}, \quad (16)$$

mientras que la $\tau - \tau$ es de la forma (12). La intersección de la recta $\tau_0 - \tau_0$ con la tangente $\tau - \tau$ se determina mediante:

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ y_0 &= y \end{aligned} \quad (17)$$

Ésta en la Fig. 3 está marcada con la letra O^* . Al sustituir (12) y (16) en (17) resulta:

$$r_{\min.}^* = t_0 = \frac{s \tan \varphi_{adm.} - s'}{2 \operatorname{sen} \varphi_{adm.}}. \quad (18)$$

Para el mecanismo con cierre geométrico del par cinemático superior, en que la leva es el eslabón impulsor tanto para la fase de subida como para la de retono, se trazan tangentes para ambas fases del diagrama adicional. Por esta razón también para ambas fases se formulan y se resuelven las ecuaciones iguales a (7).

Suponiendo que el punto D_1 mostrado en la Fig. 4, es de tangencia de la recta $\tau_1 - \tau_1$ al diagrama adicional en la fase de subida y que D_2 es el de tangencia de la $\tau_2 - \tau_2$ en la fase de retorno, entonces, el punto O de intersección de éstas será el centro de rotación de la leva. El radio $r_{\min.}$ del círculo primario de ésta tendrá magnitud igual al segmento OB_0 .

En forma paramétrica la solución es como sigue: la ecuación de la tangente $\tau_1 - \tau_1$ se representará como:

$$\begin{aligned} x_1 &= s'_1 + t_1 \operatorname{sen} \alpha_{adm.} \\ y_1 &= s_1 + t_1 \operatorname{cos} \alpha_{adm.} \end{aligned} \quad (19)$$

y de la $\tau_2 - \tau_2$ así:

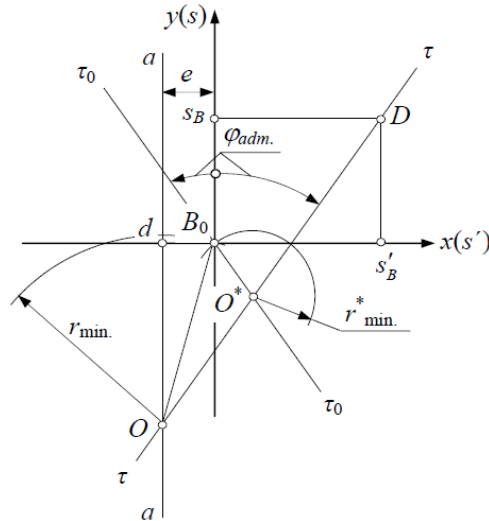


Fig. 3. Diagrama auxiliar para la forma paramétrica que ilustra la determinación del punto de intersección de la tangente $\tau - \tau$ con la recta $a - a$ y con la $\tau_0 - \tau_0$.

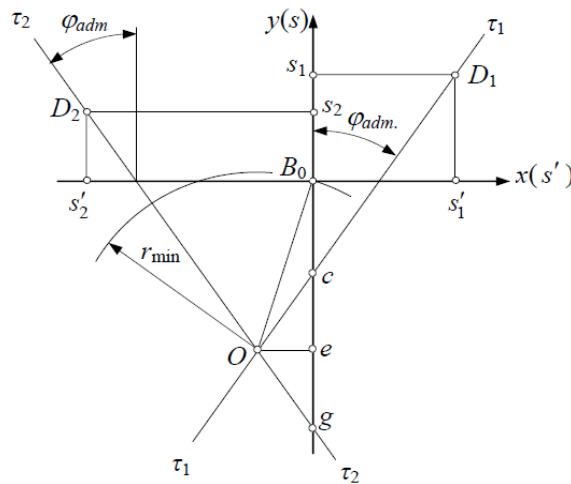


Fig. 4. Diagrama para la formulación de las ecuaciones que definen el centro de rotación de la leva de mecanismos con cierre geométrico del par cinemático superior.

$$\begin{aligned} x_2 &= -(s'_2 + t_2 \operatorname{sen} \alpha_{adm.}) \\ y_2 &= s_2 + t_2 \operatorname{cos} \alpha_{adm.} \end{aligned} \quad (20)$$

El punto O de intersección de éstas se determinará mediante:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \end{aligned} \quad (21)$$

Con la resolución del sistema de ecuaciones (21) se tiene:

$$t_2 = \frac{s_1 - s_2}{2 \cos \alpha_{adm.}} - \frac{s'_1 + s'_2}{2 \operatorname{sen} \alpha_{adm.}}. \quad (22)$$

Al sustituir en (20) el coeficiente t_2 por su valor en (22) resulta:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \left[s'_1 - s'_2 - (s_1 - s_2) \tan \alpha_{adm.} \right] \\ y_2 &= \frac{1}{2} \left(s_1 + s_2 - \frac{s'_1 + s'_2}{\tan \alpha_{adm.}} \right) \end{aligned}, \quad (23)$$

y como consecuencia:

$$r_{\min.} = OB_0 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \quad (24)$$

El método puede ser usado de igual manera para los mecanismos con seguidor oscilante. La diferencia consiste en que la ley de movimiento del seguidor debe ser representada en forma $\theta = f(\varphi)$, en donde θ es el ángulo de oscilación del seguidor. Por eso, la ecuación (4) se representará en forma:

$$r_{\min.} = \left(\frac{\theta'}{\tan \alpha_{adm.}} - \theta \right) L_2, \quad (25)$$

en donde L_2 es la longitud del seguidor. Para estos mecanismos hay que tener en cuenta que para que los ángulos de presión en el fin y en el inicio de las fases sean iguales el centro de rotación de la leva debe estar en la cuerda que pasa a través de los puntos extremos de la trayectoria de la punta del seguidor.

El resto del procedimiento es igual al ya presentado.

2.2. Mecanismos de seguidor de cara plana

Para los razonamientos expuestos a continuación resulta más conveniente representar la formula (2) de la siguiente manera:

$$r = -(s + s''). \quad (26)$$

Como en el ejemplo anterior, el radio mínimo debe tener valor máximo. Eso permite emplear el enfoque ya presentado. El método consiste en la igualación a cero de la derivada de la ecuación (26), es decir:

$$r' = -(s' + s''') = 0. \quad (27)$$

Con la solución de la ecuación (27) se determina la posición angular de la leva φ^* con la cual la recta, trazada a 45° respecto a la trayectoria del seguidor, es tangente a la porción negativa del diagrama adicional $s'' = s''(s)$.

A continuación se muestra un ejemplo de uso del método. Para esto, en la fase de retorno se considera la función de desplazamiento del seguidor en la siguiente forma:

$$s = H \left(1 - \frac{\varphi}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi \frac{\varphi}{\beta} \right). \quad (28)$$

en donde H es la carrera del seguidor; β es el ángulo de la fase de retorno de la leva; y φ es el ángulo de giro de la leva.

Entonces su primera, segunda y tercera derivadas con respecto a la variable φ resultan ser:

Tabla 2. Valores, necesarios para la construcción del diagrama adicional.

φ grad.	$k = \frac{\varphi}{\beta}$	s mm	s'' m/rad ²
0	0.00	20	0.00
5	0.08	19.92	-57.27
10	0.17	19.42	-99.22
15	0.25	18.18	-114.59
20	0.33	16.09	-99.25
25	0.42	13.26	-57.34
30	0.50	10	0.00
35	0.58	6.74	57.28
40	0.67	3.91	99.22
45	0.75	1.87	114.59
50	0.83	0.58	99.25
55	0.92	0.08	57.34
60	1.00	0	0.00

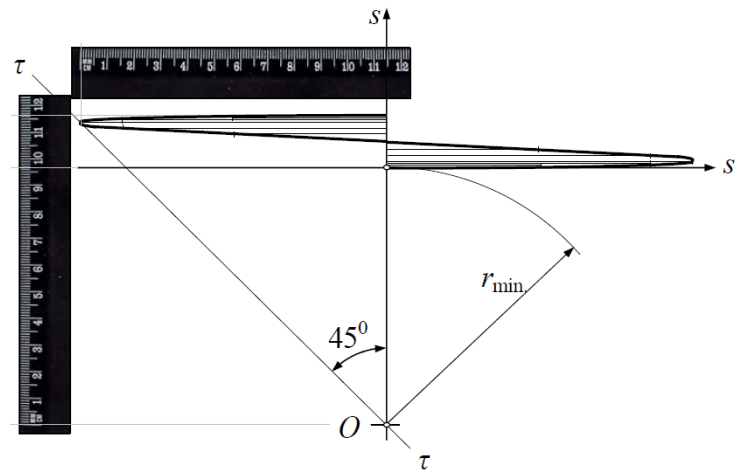


Fig. 5. Prueba de validez del método analítico de la determinación del centro de rotación de la leva del mecanismo de cara plana mediante la construcción gráfica.

$$s' = -\frac{H}{\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\beta} \right), \quad (29)$$

$$s'' = -\frac{2\pi H}{\beta^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi\varphi}{\beta} \quad (30)$$

y

$$s''' = -\frac{4\pi^2 H}{\beta^3} \cos \frac{2\pi\varphi}{\beta}. \quad (31)$$

Para el cálculo se consideran los siguientes valores: $H = 0.02$ m y $\beta = 60^\circ$.

Para el ejemplo seleccionado la ecuación (27) tomará forma:

$$r' = \frac{H}{\beta} \left(1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\beta} + \frac{4\pi^2}{\beta^2} \cos \frac{2\pi\varphi}{\beta} \right). \quad (32)$$

Para que la recta trazada a un ángulo 45° sea tangente al diagrama adicional debe cumplirse que:

$$r' = 0. \quad (33)$$

Al analizar la ecuación (32) puede verse que la (33) se cumple solamente en caso de que el coeficiente que está entre los paréntesis sea igual a cero. Su solución tiene la siguiente forma:

$$\varphi^* = \frac{\beta}{2\pi} \arccos \frac{\beta^2}{\beta^2 - 4\pi^2}. \quad (34)$$

Sustituyendo en (34) el ángulo β por su valor numérico, se recibe $\varphi^* = 15.27^\circ$ y, sustituyendo los términos en (26) por sus valores se tiene: $r_{\min} = 0.09645$ m o $r_{\min} = 96.45$ mm.

Al igual que en el ejemplo anterior, el método es comprobado a través de su contraparte gráfica.

La Tabla 2 incluye valores necesarios para la construcción del diagrama adicional y en la Fig. 5 se muestra la solución gráfica del problema. En el sistema de coordenadas ss'' con el inicio en el punto B_0 se construye el diagrama adicional para la fase de retorno y al ángulo 45° respecto al eje s se traza la tangente $\tau - \tau$ a su porción negativa. El punto O de intersección de la tangente con el eje s marca el centro de rotación de la leva. Trazando a partir de este punto una circunferencia a través del inicio del sistema de coordenadas B_0 se construye el círculo primario de radio de magnitud mínima. Al medir su radio con la regla se obtiene que $r_{\min} \approx 97$ mm, que muestra plena coincidencia con el cálculo analítico.

Es posible usar el presente método también para los mecanismos de seguidor oscilante de cara plana.

3. CONCLUSIONES

Con lo anterior, se ha presentado un nuevo método analítico que de manera única determina el centro de rotación de la leva de un mecanismo plano. Con éstemétodo se determina el radio del círculo primario de magnitud mínima que permite obtener un mecanismo con las propiedades óptimas de magnitud mínima.

La comparación de los resultados obtenidos mediante el método analítico descrito con los resultados obtenidos mediante los métodos gráficos muestran la validez completa del enfoque propuesto.

Es posible apreciar que la forma de las dependencias analíticas es sencilla, ocupa habituales métodos matemáticos lo que permite recomendar este método para el empleo en el diseño de las máquinas, en la enseñanza en el sistema educativo, también para el desarrollo de SOFTWARE.

NOMENCLATURA

e excentricidad, la distancia más corta entre el centro de rotación de la leva y la trayectoria de la punta del seguidor

s desplazamiento del seguidor

s' análogo de velocidad (la primera derivada del desplazamiento lineal de la punta del seguidor en función al desplazamiento angular de la leva, $s' = ds/d\varphi$)

s'' análogo de aceleración (la segunda derivada del desplazamiento lineal de la punta del seguidor en función al desplazamiento angular de la leva, $s'' = d^2s/d\varphi^2$)

r_0 radio del círculo primario

μ_L escala en que se diseña el mecanismo o diagrama ($\mu_L = \frac{L}{l}$, en donde L es la magnitud natural en metros y l es la presentación gráfica de ésta en milímetros)

α ángulo de presión

φ ángulo de giro de la leva

NOTAS

a) En los mecanismos planos la unión móvil de dos eslabones utilizando superficies cilíndricas de diámetro igual, una de las cuales es exterior y la otra es interior, o planas se considera par cinemático inferior y mediante líneas y puntos, así como la unión de dos cilindros mediante las superficies exteriores, superior.

b) El cierre de fuerza del par cinemático superior requiere que se aplique la fuerza externa para la realización del contacto continuo de dos eslabones y geométrico, o de forma, para la realización del contacto mediante la forma geométrica de la leva o del seguidor.

REFERENCIAS

- [1] Erdman, A.G., Sandor, G.N., *Diseño de Mecanismos. Análisis y Síntesis*, Prentice Hall, México (1998)
- [2] Heronimus, J.L., “Determinación del perfil de la leva por el movimiento dado del seguidor”, *Técnica del Fota Aérea*, N3. Rusia (1933)
- [3] Mabie, H.H., Reinholtz, C.F., *Mecanismos y Dinámica de Maquinaria*, Limusa, México (2004)
- [4] Marghitu, D.B., Crocker, M.J., *Analytical Elements of Mechanisms*, Cambridge University Press (2001)
- [5] Norton, R.L., *Diseño de Maquinaria. Síntesis y Análisis de Máquinas y Mecanismos*, McGraw-Hill, México (2005)
- [6] Calero Pérez, R., Carta González, J.A., *Fundamentos de Mecanismos y Máquinas para ingenieros*, McGraw-Hill, México (1999)
- [7] Shigley, J.E., Uicker, J.J.Jr., *Teoría de Máquinas y Mecanismos*, McGraw-Hill, México (1999)
- [8] Gavrilenko, V.A., (Ed.) *Teoría de Mecanismos*, Vishaya Shkola, Moscú, Rusia (1973)
- [9] Frolov, K.V., (Ed.) *Teoría de Mecanismos y Máquinas*, MGTU, Moscú, Rusia (2002)

ANALYTICAL DESIGN OF FLAT MACHANISMS OF CAMS OF MINIMAL MAGNITUD

Abstract – One of the most important stages of the calculation of flat mechanisms of cam is the definition of the radio of the primary circle of the cam. In the article there a new analytical method of his calculation based on the graphic interpretation of the determination of the center of the rotation of the cam is proposed that allows to designt the mechanism with optimum parameters of minimal magnitude. The method is simple in use, does not demand use of complex mathematical receptions. In the first part of the article the theoretical bases used for the development of method they are exhibited, whereas in the second one his development and use for the calculation of the radio of the primary circle of the cam. The method for the calculation of the mechanisms of levies with follower of the linear alternative movement of wedge, of roller, of curved shoe and of flat face is elaborated. The method for the use by the teachers who give classes of the Theory of the Mechanisms and the Machines, for the engineers designers of the mechanical systems, also for the engineers who prepare SOFTWARE is destined.

Keywords – Theory of Mechanisms, Mechanisms of cam, Primary circle of the cam.